

Decision problem on interactions

慶應義塾大学 理工学研究科 基礎理工学専攻/RIKEN

和知秀忠 (Hidetada WACHI) *

概要

相互作用とは、隣接するサイト上の状態の変化を記述する有向対称グラフのことである。近年、坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] の研究で、相互作用として記述されるミクロモデルに対して、流体力学極限の証明に重要な Varadhan の分解定理の証明が与えられた。これら研究では、相互作用が irreducibly quantified という条件を満たすことが重要である。本研究では、古典的な流体力学極限の研究で扱われていなかった、これらの理論に適用できる新たな相互作用の例は与えるために、相互作用が irreducibly quantified であることを判定するアルゴリズムを、可換半群の問題に帰着させることで構成した。

1 導入

流体力学極限とは、マクロな決定論的偏微分方程式をミクロな確率論的な大規模相互作用系の極限として記述する数学的手法のことである。古典的な先行研究においては、流体力学極限を証明するにあたって、ミクロな大規模相互作用系のモデルごとの特性に依存した個別具体的なアプローチが必要であったが、近年、一般のモデルに対して適用できる公理的な枠組みを構成する研究がなされている。例えば、坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] は、一般的なミクロな大規模相互作用系に対して、流体力学極限の証明に重要な Varadhan の分解定理の証明を与えた。さらに、最近、坂内-佐々田 [4] では、上の研究において大規模相互作用系を記述していた相互作用と呼ばれる対象を一般化することで、坂内-亀谷-佐々田 [1] の研究の部分的な拡張を得ている。

Definition 1.1. S を有限集合とする。組 (S, ϕ) が S 上の相互作用であるとは、 $\phi \subset (S \times S) \times (S \times S)$ であって、 $(S \times S, \phi)$ が対称有向グラフであることをいう。すなわち、任意の $s, s' \in S$ に対して、 $(s, s') \in \phi$ ならば $(s', s) \in \phi$ が成立することである。また、 S をこの相互作用 (S, ϕ) の状態空間と呼ぶ。

Example 1.2. $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する。 $S := \{0, 1, \dots, \kappa\}$ とおく。

1. 部分集合 $\phi_{\kappa\text{-ex}} \subset (S \times S) \times (S \times S)$ を

$$\phi_{\kappa\text{-ex}} := \{((j, k), (j-1, k+1)), ((j-1, k+1), (j, k)) \mid 0 < j \leq \kappa, 0 \leq k < \kappa\}$$

と定義する。このとき、相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ex}})$ を状態空間 S 上の generalized exclusion interaction

* E-mail: wachi213@keio.jp

と呼ぶ.

2. 部分集合 $\phi_{\kappa\text{-ms}} \subset (S \times S) \times (S \times S)$ を

$$\phi_{\kappa\text{-ms}} := \{((j, k), (k, j)) \mid 0 \leq j, k \leq \kappa, j \neq k\}$$

と定義する. このとき、相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ms}})$ を状態空間 S 上の multi species exclusion interaction と呼ぶ.

その他の例に関しては、[2] を参照されたい.

流体力学極限の理論においては、保存量という概念が重要である. 写像 $\xi : S \rightarrow \mathbb{R}$ が相互作用 (S, ϕ) の保存量であるとは、任意の $((s, t), (s', t')) \in \phi$ に対して、

$$\xi(s) + \xi(t) = \xi(s') + \xi(t') \quad (1)$$

を満たすことをいう. ここで、任意の定数関数は保存量であることに注意されたい. そのため、 $\text{Consv}^\phi(S)$ を保存量からなる $\mathbb{R}$ -ベクトル空間を定数関数で貼られる部分ベクトル空間で割って得られる商ベクトル空間と定義する. 坂内-高力-佐々田-和知-山本 [2] では、相互作用の保存量を用いた分類理論を与えている.

Example 1.3. $S := \{0, 1, \dots, \kappa\}$ とおく. 任意の $i \in S$ に対して、 $\xi_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ を $\xi_i(j) := \delta_{ij}$ と定義する.

1. 相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ex}})$ に対して、 $\text{Cosnv}^{\phi_{\kappa\text{-ex}}}(S)$ は $\sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i$ で張られる.
2. 相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ms}})$ に対して、 $\text{Cosnv}^{\phi_{\kappa\text{-ms}}}(S)$ は $\xi_1, \dots, \xi_{\kappa}$ で張られる.

保存量は任意の任意の $((s, t), (s', t')) \in \phi$ に対して、式 (1) を満たす解を求めれば良いので、線形代数によって $\text{Consv}^\phi(S)$ の基底は計算することができる. 特に、自然数ベクトルによる基底が取れることに注意されたい.

坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] では、irreducibly quantified という条件が証明に必要であった. そこで、次に、irreducibly quantified な相互作用を定義する. 任意の (X, E) を有限連結対称有向グラフと保存量 ξ に対して、写像 $\xi_X : S^X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\xi_X(\eta) := \sum_{x \in X} \xi(\eta_x), \quad \eta = (\eta_x)_{x \in X} \in S^X$$

で定義する. ここで、 $\Phi_E \subset S^X \times S^X$ を

$$\Phi_E := \{(\eta, \eta') \in S^X \times S^X \mid \exists x, y \in X, ((\eta_x, \eta_y), (\eta'_x, \eta'_y)) \in \phi, \forall z \neq x, y, \eta_z = \eta'_z\}$$

と定義する.

Definition 1.4. 相互作用 (S, ϕ) が irreducibly quantified であるとは、次の条件を満たすことをいう; 任意の有限連結対称有向グラフ (X, E) に対して、任意の $\eta, \eta' \in S^X$ が任意の保存量 ξ に対して $\xi_X(\eta) = \xi_X(\eta')$ を満たすならば、 η と η' はグラフ (S^X, Φ_E) において同じ連結成分に属している.

相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であることは、任意の有限連結対称有効グラフ (X, E) に対して、 (S^X, Φ_E) の連結成分がその連結成分に含まれる点の保存量によって、完全に決定されていることを意味している。

流体力学極限の先行研究において扱われているモデルの多くは、*irreducibly quantified* な相互作用として記述される。例えば、Kipnis-Landim-Olla [6] にて研究されている *generalized exclusion interaction* は、*irreducibly quantified* であることが知られている。また、Nagahata [7] で扱われている *lattice gas with energy* も *irreducibly quantified* な相互作用の例である。

Lemma 1.5 ([2, Example 2.10, Proposition 2.19]). *Example 1.2* にある *generalized exclusion interaction* と *multi species interaction* は、ともに *irreducibly quantified* である。また、*lattice gas with energy* も *irreducibly quantified* な相互作用である。

ここで、先行研究では扱われてこなかった相互作用のうちで、内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] の理論に適用可能な例を挙げることを考えたい。そのためには、与えられた相互作用が、*irreducibly quantified* であるかどうかを判定するアルゴリズムが必要である。[2, Proposition 2.19] では、Lemma 1.5 に挙げた例のほかにもいくつかの相互作用が *irreducibly quantified* であることを示しているが、その証明はモデルに強く依存した形になっており、一般の相互作用に対して、*irreducibly quantified* であるかどうかを判定する手法が与えている訳ではない。そこで、本研究では、与えられた相互作用が *irreducibly quantified* であるかどうかを判定するアルゴリズムを構成した。本研究の主結果は次のとおりである。

Theorem 1.6. 与えられた相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であるかという問題は、決定可能である。

これによって、計算機を用いることで、坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] の理論に適用可能な相互作用を列挙することが可能になった。本レポートの最後に、 S のサイズが 5 の場合の *irreducibly quantified* な相互作用のリストを掲載している。

2 証明のアイデア

この節では、Theorem 1.6 の証明のアイデアについて解説する。そのために、*exchangeable* な相互作用と *separable* な相互作用を定義する。

Definition 2.1. (S, ϕ) を相互作用とする。

1. (S, ϕ) が *exchangeable* であるとは、任意の $s, s' \in S$ に対して、 (s, s') と (s', s) が有向グラフ $(S \times S, \phi)$ において、同じ連結成分に含まれることをいう。
2. (S, ϕ) が *separable* であるとは、任意の $s, s' \in S$ が、任意の保存量 ξ に対して $\xi(s) = \xi(s')$ を満たすならば、 $s = s'$ が成立することをいう。

相互作用 (s, ϕ) が *irreducibly quantified* であるならば、 (S, ϕ) は *exchangeable* かつ *separable* である。実際、有限連結対称有向グラフとして、それぞれ、2 頂点、1 頂点のものを考えることで、

irreducibly quantified であることから、exchangeable、separable であることが導かれる。また、相互作用 (S, ϕ) が exchangeable かつ separable であることは、状態空間 S が有限であることから、計算機によって検証可能であることに注意されたい。したがって、以下では、相互作用 (S, ϕ) は exchangeable かつ separable であると仮定して良い。

ここで、次のような n 頂点対称有向グラフ

$$\circ \leftrightarrow \circ \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \circ$$

を考える。すなわち、 $X_n := \{1, \dots, n\}$, $E := \{(i, i+1), (i+1, i) \mid 1 \leq i < n\}$ で定義される有向グラフ (X, E) である。このとき、任意の $(\eta, \eta') \in \Phi_E$ は、 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ を $((\eta_i, \eta_{i+1}), (\eta'_i, \eta'_{i+1})) \in \phi$ を満たすように取ると、

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_n) \rightarrow (\eta_1, \dots, \eta'_i, \eta'_{i+1}, \dots, \eta_n) = \eta'$$

という変換だと見做せる。したがって、任意の $s \in S$ に対して x_s を対応する形式的な変数だとすると $(\eta, \eta') \in \Phi_E$ は、

$$x_{\eta_1} \cdots x_{\eta_i} x_{\eta_{i+1}} \cdots x_{\eta_n} \rightarrow x_{\eta_1} \cdots x_{\eta'_i} x_{\eta'_{i+1}} \cdots x_{\eta_n}$$

という語の変換だと解釈することができる。そこで、次のような半群

$$M(S, \phi) := \langle x_s, s \in S \mid \forall ((s, t), (s', t')) \in \phi, x_s x_t = x_{s'} x_{t'} \rangle$$

を考えることにする。もし、相互作用 (S, ϕ) が exchangeable であるときには、この半群は可換であることに注意されたい。

次に、相互作用の保存量と半群の準同型を関連付ける。任意の保存量 ξ に対して、写像 $\xi_M : M(S, \phi) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\xi_M(x_{s_1} \cdots x_{s_m}) := \xi(s_1) + \cdots + \xi(s_m)$$

と定義すると、これは well-defined は準同型 $\xi_M : M(S, \phi) \rightarrow \mathbb{R}_+$ である。ここで、 $\mathbb{R}_+$ は $\mathbb{R}$ に加法を演算として入れた半群である。この対応によって、次の同型が得られる。

Lemma 2.2 ([9, Lemma 3.4]). 相互作用 (S, ϕ) に対して、上の対応 $\xi \mapsto \xi_M$ によって、ベクトル空間としての同型

$$\{\text{保存量}\} \cong \text{Hom}(M(S, \phi), \mathbb{R})$$

が誘導される。

以上のことから、 $\text{Consv}^\phi(S)$ の自然数ベクトルによる基底が取れたことを思い出すと、相互作用 (S, ϕ) が irreducibly quantified であるとき、任意の $x, y \in M(S, \phi)$ が、任意の準同型 $f : M(S, \phi) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $f(x) = f(y)$ を満たすならば、 $x = y$ が成立することがわかる。このことは、可換半群 $M(S, \phi)$ が cancellative かつ power-cancellative であることと同値である。

Definition 2.3. 可換半群 M が cancellative であるとは、任意の $a \in M$ について、任意の $b, c \in M$ に対して、 $ab = ac$ ならば $b = c$ が成立することをいう。また、可換半群 M が power-cancellative であるとは、任意の $a, b \in M$ に対して、ある $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ が存在して、 $a^n = b^n$ ならば $a = b$ が成立することをいう。

Proposition 2.4 ([5, II, Corollary 7.4]). 単位元を持たない有限生成可換半群 M が *cancellative* かつ *power-cancellative* であることと、ある有限個の準同型 $f_i : M \rightarrow \mathbb{N}_+$, $i = 1, \dots, m$ が存在して、任意の元 $x, y \in M$ について、任意の i に対して、 $f_i(x) = f_i(y)$ ならば $x = y$ が成立することは同値である。

したがって、相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であることから、可換半群 $M(S, \phi)$ が *cancellative* かつ *power-cancellative* であることが従うが、実は、この逆も成立する。

Theorem 2.5 ([9, Theorem 3.7]). 相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であることと、可換半群 $M(S, \phi)$ が *cancellative* かつ *power-cancellative* であることは同値である。

さらに、有限表示可換半群 M が *cancellative* かつ *power-cancellative* であることは、決定可能命題である。実際、次の命題が知られている。

Theorem 2.6 ([8, Theorem 5.8]). 有限表示可換半群 M が *cancellative* であるかは決定可能である。

また、*cancellative* な可換半群はアーベル群に埋め込むことができる。そのため、与えられた *cancellative* な可換半群が *power-cancellative* であるかどうかは、単因子論を用いることで確かめることができる。以上のことから、与えられた相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であるかは決定可能であることがわかった。

3 相互作用のリスト

最後に状態空間 S のサイズが 5 である相互作用のリスト Figure 1 を与える。このリストでは、[2] の保存量による相互作用の分類にしている。

Definition 3.1. 二つの相互作用 (S, ϕ) , (S', ϕ') が等しいとは、ある全単射 $S \cong S'$ が存在して、誘導される写像 $\text{Map}(S', \mathbb{R}) \cong \text{Map}(S, \mathbb{R})$ がベクトル空間の同型 $\text{Consv}^{\phi'}(S') \cong \text{Consv}^{\phi}(S)$ を誘導することをいう。

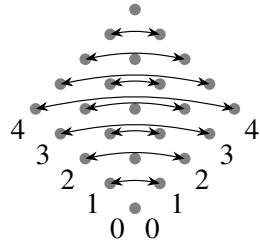
ある相互作用 (S, ϕ) が、*irreducibly quantified* である相互作用と等しいとしても、 (S, ϕ) 自身が *irreducibly quantified* であるとは限らないことに注意されたい。しかし、このリストに載っている相互作用はすべて *irreducibly quantified* であり、任意の状態空間のサイズが 5 の *irreducibly quantified* な相互作用は、このリスト Figure 1 のうちのいずれかと等しい。

4 謝辞

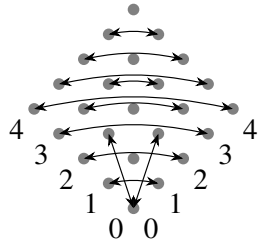
本研究は理研の大学院生リサーチ・アソシエイト制度の下での成果です。

参考文献

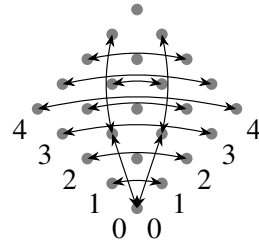
- [1] K. Bannai, Y. Kametani, and M. Sasada, Topological structures of large-scale interacting systems via uniform functions and forms, Forum Math. Sigma **12** (2024), Paper No. e107, DOI



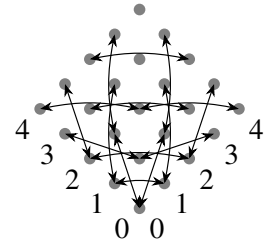
(a) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$



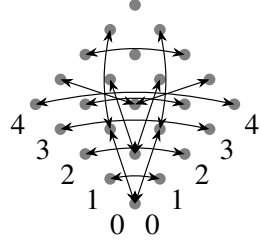
(b) $\xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4$



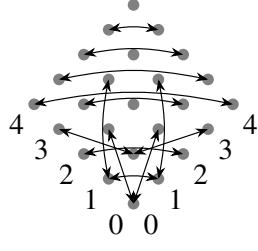
(c) $\xi_1 - \xi_2, \xi_3 - \xi_4$



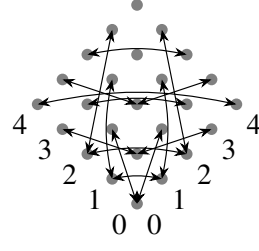
(d) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4$



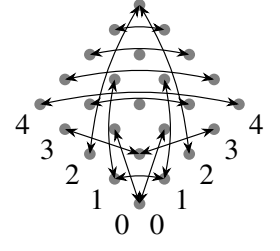
(e) $\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 - 3\xi_4$



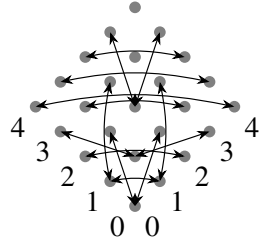
(f) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3, \xi_4$



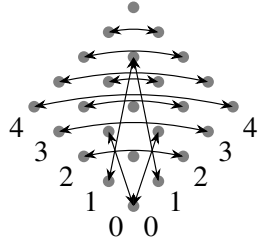
(g) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - 3\xi_4$



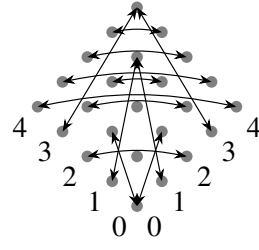
(h) $2\xi_1 - 2\xi_2 + 4\xi_3 - \xi_4$



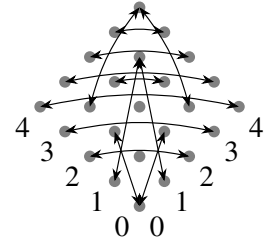
(i) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - 4\xi_4$



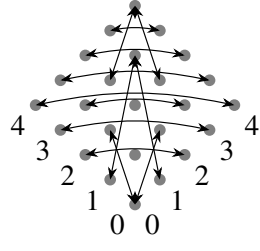
(j) $2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3, 2\xi_4$



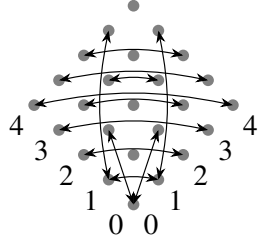
(k) $4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4$



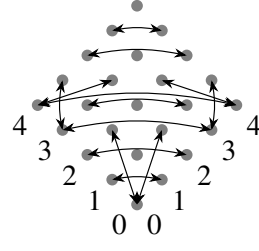
(l) $4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 + 3\xi_4$



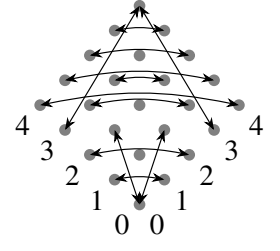
(m) $4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4$



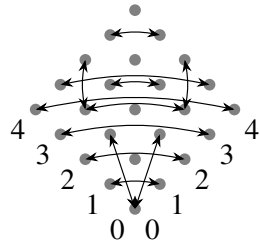
(n) $\xi_1 - \xi_2 + \xi_4, \xi_3 - \xi_4$



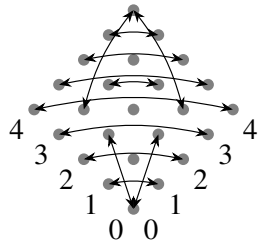
(o) $\xi_1 - \xi_2 - \xi_4, \xi_3 + \xi_4$



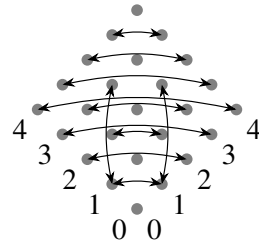
(p) $\xi_1 - \xi_2, 2\xi_3 + \xi_4$



(q) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_4, \xi_3 + \xi_4$



(r) $2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_4, 2\xi_3 + \xi_4$



(s) $\xi_1 + \xi_3, \xi_2 - \xi_3, \xi_4$

FIG 1: Irreducibly quantified interactions for $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

10.1017/fms.2024.61. MR4831143

- [2] K. Bannai, J. Koriki, M. Sasada, H. Wachi, and S. Yamamoto, *On interactions for large-scale interacting system*. arXiv:2410.06778.
- [3] K. Bannai and M. Sasada, *Varadhan's Decomposition of Shift-Invariant Closed L^2 -forms for large-scale Interacting Systems on the Euclidean Lattice*. arXiv:2111.08934.
- [4] K. Bannai and M. Sasada, *On Uniform Functions on Configuration Spaces of large-scale Interacting Systems*. arXiv:2408.12886.
- [5] P. A. Grillet, *Commutative semigroups*, Advances in Mathematics (Dordrecht), vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001. MR2017849
- [6] C. Kipnis, C. Landim, and S. Olla, *Hydrodynamical limit for a nongradient system: the generalized symmetric exclusion process*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 11, 1475–1545, DOI 10.1002/cpa.3160471104. MR1296786
- [7] Y. Nagahata, *Fluctuation dissipation equation for lattice gas with energy*, J. Statist. Phys. **110** (2003), no. 1-2, 219–246, DOI 10.1023/A:1021022829221. MR1966328
- [8] P. Narendran and C. Ó'Dúnlaing, *Cancellativity in finitely presented semigroups*, J. Symbolic Comput. **7** (1989), no. 5, 457–472, DOI 10.1016/S0747-7171(89)80028-8. MR0999514
- [9] H. Wachi *Decision problem on interactions*. arXiv:2410.11292.